Chap 9 Équation différentielle

§9.1 généralités sur les équations différentielles linéaires :

ici, y désigne une fct d'une variable réelle notée t.

Def - on appelle <u>équation différentielle linéaire d'ordre n</u> une relation liant une fct dérivable n fois à ses dérivées d'ordre $\leq n$, de la forme

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = b(t) \qquad (E)$$

(notation abrégée : $y^{(n)} + a_{n-1}^{(t)} y^{(n-1)} + \cdots + a_0^{(t)} y = b(t)$ avec $a_{n-1}^{(t)} \ldots a_0^{(t)}, b^{(t)}$ des fct.

- on appelle <u>solution de E sur I</u> une fct y dérivable n fois qui vérifie l'équation (E) sur I
- si $b(t) = 0$ $\forall t \in I$, on dit alors que l'équation (E) est <u>homogène</u> (ou sans second membre)
- on appelle <u>l'équation homogène associée</u> (ou l'équation sans second membre associée) à (E) l'équation suivante

$$y^{(n)} + a_{n-1}^{(t)} y^{(n-1)} + \cdots + a_0^{(t)} y = 0 \qquad (E_0) \quad \text{ou } (H)$$

- Résoudre sur I l'équation différentielle (E) signifie chercher les solutions de (E) sur I

Prop Si y_1, y_2 sont deux solutions de (E_0) alors $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, la fct $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est encore une fct de (E_0)

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Prop ~~notons~~ considérons l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}^{(t)} y^{(n-1)} + \cdots + a_1^{(t)} y' + a_0^{(t)} y = b(t) \qquad (E)$$

notons S_H l'ensemble des solutions de son équation homogène associée

Soit y_p une solution particulière de (E)

alors l'ensemble des solutions de $(E) = \{ y_p + y \ / \ y \in S_H \}$

Autrement dit : toute solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation sans second membre associée

Dem. Soit $\tilde{y}_p$ une autre solution particulière de (E)

on a donc $\tilde{y}_p - y_p$ une solution de (H)

Prop (principe de superposition des solutions)

Soit y une solution de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ et

Soit $\tilde{y}$ ——————— $\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = \tilde{b}(t)$

alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha y + \beta\tilde{y}$ est une solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_n(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = \alpha b(t) + \beta\tilde{b}(t)$$

but de ce chapitre : résoudre l'équation dans le cas $n = 1$, ou 2

§ 9.2. equation diff. linéaire d'ordre 1

Donc, il s'agit de résoudre l'équation suivante

$$y' + a(t)y = b(t) \qquad \text{sur } I = \text{un intervalle}$$

avec $\left.\begin{matrix} a(t) \\ b(t) \end{matrix}\right\}$ deux fcts continues sur I

§ 9.2.1 Cas homogène

dans ce cas, $b(t) = 0 \quad \forall t \in I$

donc à resoudre l'équation $y' + a(t)y = 0$

avec $a(t)$ fct continue sur I

Thm Soit $A(t)$ une primitive de la fct $a(t)$ sur I. alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'(t) + a(t)\, y(t) = 0$ est l'ensemble des fcts y de la forme $y(t) = c\, e^{-A(t)}$.

Dém.

$$y' + a(t)\, y = 0 \iff (y' + a(t)\, y)\, e^{+A(t)} = 0$$

$$\iff (y \cdot e^{+A(t)})' = 0 \quad \text{sur } I$$

puisque I est un intervalle $\Rightarrow$ $y\, e^{+A(t)} = C$ avec C une constante.

d'où $y = C e^{-A(t)}$

Rem on a besoin un paramètre pour décrire l'ens. des sol. d'une éq.# d'ordre 1

1 paramètre $\Longleftrightarrow$ d'ordre 1

$\uparrow$

phénomène général !

ex: $y' + \frac{1}{1+x^2}\, y = 0$

9.2.2 Cas général

Donc à résoudre

$$y' + a(t)\, y = b(t) \text{ sur } I \quad \text{avec} \qquad (E)$$

$a(t)$, $b(t)$ deux fcts continue sur I

2 étapes pour résoudre. (E)

étape 1. résoudre l'équation différentielle sans second membre associée.

$$y' + a(t)\, y = 0 \qquad (E_0)$$

$$S_{E_0} = \left\{ C e^{-A(t)} \;/\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

avec $A(t)$ une primitive de $a(t)$

étape 2 trouver une solution particulière y_p de (E)

Donc difficulté principale trouver une solution particulière de (E)

Variation de la constante:

~~on fait varier~~ la forme générale des solutions de (E_0)

$$C e^{-A(t)}$$

On aimerait chercher une solution particulière de (E) qui peut s'écrire sous la forme suivante $\boxed{\text{variation de la constante}}$

$$y(t) = C(t)\, e^{-A(t)} \quad \text{avec } C(t) \text{ une fct dérivable sur } I$$

alors $y'(t) = C'(t) e^{-A(t)} + C(t)\,(-A(t))' e^{-A(t)}$

$= C'(t) e^{-A(t)} - C(t)\, a(t)\, e^{-A(t)}$

donc $y'(t) + a(t) y(t) = C'(t) e^{-A(t)} - C(t)a(t) e^{-A(t)} + a(t)C(t) e^{-A(t)}$

$= C'(t)\, e^{-A(t)}$

Donc la fct $y = y(t) = C(t) e^{-A(t)}$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow \quad y'(t) + a(t) y(t) = b(t)$

$\Leftrightarrow \quad C'(t) e^{-A(t)} = b(t)$

$\Leftrightarrow \quad C'(t) = b(t)\, e^{A(t)}$

Donc pour obtenir une solution particulière de (E), suffit de prendre $C(t)$ une primitive de la fct $b(t)\, e^{A(t)}$

par exemple $C(t) = \int_{t_0}^{t} b(u)\, e^{A(u)}\, du$ #

Rem ~~En fait~~ Donc ~~la forme général des solution de (E) est~~

$\cancel{\left(\int b(u) e^{A(u)} du\right) e^{A(t)}}$ $\quad S_E = \left\{ e^{-A(t)} \left(C + \int_{t_0}^{t} b(u) e^{+A(u)} du \right) \Big/ C \in \mathbb{R} \right\}$

Exemple $\quad y' + y = (x^2 - 1) e^{x} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (E)$

étape 1. résoudre son éq. homogène associée

$$y' + y = 0 \qquad (E_0)$$

$\Rightarrow \quad S_{E_0} = \{ C e^{-x} \,/\, C \in \mathbb{R} \}$

étape 2 trouver une solution particulière on aimerait trouver une sol. particulière sous la forme (9.3)

$$y_p(t) = C(t)\, e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad y_p'(t) = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(t) + y_p'(t) = C'(t)\, e^{-t}$$

Donc la fct $y_p = y_p(t)$ est une sol. de (E)

$$\Leftrightarrow \quad y_p(t) + y_p'(t) = (t^2-1)\, e^{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(t) = (t^2-1)\, e^{2t}$$

donc on peut prendre

$$C(t) = \int_0^t (u^2-1)\, e^{2u}\, du$$

or $\int (u^2-1)\, e^{2u}\, du$

$$= \int u^2 e^{2u} du - \int e^{2u} du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2\, d(e^{2u}) - \frac{1}{2}\int d(e^{2u})$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u} - \frac{1}{2}\int e^{2u}\cdot(2u)\, du - \frac{1}{2}e^{2u}$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u} - \int u\, e^{2u}\, du - \frac{1}{2}e^{2u}$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u} - \frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}\int u\, d(e^{2u})$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u} - \frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}u\, e^{2u} + \frac{1}{2}\int e^{2u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u} - \frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}u\, e^{2u} + \frac{1}{4}e^{2u} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^2 e^{2u} - \frac{1}{2}u\, e^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u} + C.$$

donc $C(t) = \int_0^t (u^2-1)\, e^{2u}\, du$

$$= \frac{1}{2}t^2 e^{2t} - \frac{1}{2}t\, e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}$$

d'où $y_p(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}t^2 e^{2t} - \frac{1}{2}t\, e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}\right)$

$$= \frac{1}{2}t^2 e^{t} - \frac{1}{2}t\, e^{t} - \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

En fin

$$S_E = \{ ce^{-t} + (\tfrac{1}{2}t^2e^{t} - \tfrac{1}{2}te^t - \tfrac{1}{4}e^t + \tfrac{1}{4}e^{-t}) \ / c \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (c+\tfrac{1}{4})e^{-t} + (\tfrac{1}{2}t^2e^t - \tfrac{1}{2}te^t - \tfrac{1}{4}e^t) / c \in \mathbb{R} \}$$

<u>Rem.</u> on peut prendre n'import quelle primitive ~~de~~ pour obtenir $c(t)$

<u>e.g.</u> on peut encore prendre

$$c(t) = \tfrac{1}{2}t^2e^{2t} - \tfrac{1}{2}te^{2t} - \tfrac{1}{4}e^{2t}.$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \tfrac{1}{2}t^2e^t - \tfrac{1}{2}te^t - \tfrac{1}{4}e^t$$

$$\rightsquigarrow S_E = \{ ce^{-t} + (\tfrac{1}{2}t^2e^t - \tfrac{1}{2}te^t - \tfrac{1}{4}e^t) / c \in \mathbb{R} \}$$

<u>§9.2.3</u> équation différentielle d'ordre 1 avec condition initiale

par fois, on peut compléter une équation diff. par une condition initiale :

$$\begin{cases} y' + a(t)\, y = b(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 & \longleftarrow \text{condition initiale} \end{cases}$$

<u>avec</u>
- I. un intervalle
- $a(t)$, $b(t)$ deux fcts continues
- $t_0 \in I$

<u>Donc</u> résoudre cette eq. diff. avec condition initiale

$\Leftrightarrow$ trouver une fct (dérivable) $y = y(t)$ sur I <u>t.q</u>

$$y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t) \qquad \forall t \in I$$

En plus, on demande que la valeur de la fct y en $t = t_0$ vaut y_0.

<u>Concernant l'existence de solution, on a</u>

9.4

thm (Cauchy) Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $a(t)$, $b(t)$ deux fcts réelles continue sur I,
soit $t_0 \in I$ $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors le système suivant

$$\begin{cases} y' + a(t) y = b(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une seule solution $y = y(t)$.

exemple.

(E) $$\begin{cases} y' + y = (x^2-1) e^x & x \in \mathbb{R} \quad (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

on sait l'éq. $y' + y = (x^2-1) e^x$

admet pour les solutions

$$S_E = \left\{ C e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^t - \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{4} e^t \,/\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour ~~y~~ pour trouver

$y \in S_E$ t.q. $y(0) = 1$

$\Leftrightarrow$ à trouver C t.q.

$$\left(C e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^t - \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{4} e^t \right)\Big|_{t=0} = 1.$$

$$\parallel$$

$$C - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow$ la sol. de ce système est

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{5}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^t - \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{4} e^t.$$

§9.2.4 équation diff. d'ordre 1 à coeff. constants et à second membre classique.

on considère ~~la~~ le cas suivant.

$$y' + a y = b(t) \qquad t \in I \qquad (E)$$

avec – $a \in \mathbb{R}$ une constante réelle

– $b(t)$ fct continue du type classique sur I

Rem ① Une telle équation s'appelle "une équation diff. linéaire d'ordre 1 à coefficients constants"

② classique : par exemple $b(t) = P(t)$ avec P un polynôme

ou $\sin(\alpha t)$ ou $\cos \alpha t$ $\quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

e^{kt} $\quad k \in \mathbb{R}$

on a le resultat suivant :

~~Prop.~~ Def. On appelle l'équation caractéristique associée à (E) l'équation d'ordre 1 suivante

$$r + a = 0 \qquad (C)$$

↑ variable

Prop

Si f est du type	alors il existe une solution y_p du type
$f(t) = P(t)$ avec P un polynôme de degré n	• si $a \neq 0$, ops $y_p(t) = Q(t)$ avec Q polynôme de degré n • si $a = 0$, ops $y_p(t) = t\,Q(x)$ avec Q polynôme de degré n
$f(x) = e^{kx}$ $\quad (k \in \mathbb{R})$	• si k n'est pas racine de (C) (i.e. $k \neq -a$) alors $y_p(t) = Ae^{kt}$ • si k est la racine de (C) (i.e. $k = -a$) ops $y_p(t) = At\,e^{kt}$.

si f est du type	alors il existe une solution y_p du type
$f(t) = \cos \omega t$ ou $\sin \omega t$ $(\omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0)$	· $y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$
$f(t) = P(t)\, e^{kt}$ avec P un polynôme de degré n	· Si k n'est pas racine de (c) (i.e $k \neq -a$) alors $y_p(t) = Q(t)\, e^{kt}$ avec Q un polynôme de degré n à déterminer · Si k est une racine de (c) (i.e $k = -a$) alors $y_p(t) = t\,Q(t)\, e^{kt}$ avec Q un polynôme de degré n
$f(x)$ est une somme des cas précédents	Somme correspondante.

Rem : ① degré d'un polynôme

Soit $P(t)$ un polynôme à variable t. Supposons

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

alors

$$\deg(P) := \begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{ i \ / \ a_i \neq 0 \} & \text{si } P \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P = 0 . \end{cases}$$

② cette prop. est valable que pour les équations diff. linéaire à coeff. constant.

(i.e pour eq. $y' + ay = b(t)$, $t \in I$

avec - a une constante réelle

- $b(t)$ fct continue

<u>par exemple</u>. on reprend l'exemple précédent :

$$y' + y = (x^2-1)\, e^x \qquad (E)$$

<u>donc</u> $f(x) = p(x)\, e^{kx}$ avec $p(x) = x^2-1$, $k=1$

En plus, $\deg(p) = 2$

comme $k=1$ n'est pas racine de ~~son~~ l'éq. car. associée

$$r + 1 = 0$$

<u>Donc</u> la proposition implique

$\exists$ une solution particulière sous la forme

$$y_p^*(x) = Q(x)\, e^x$$

avec $Q(x)$ un polynôme de degré 2.

<u>ops</u> $Q(x) = ax^2 + bx + c$

avec a, b, c trois coefficients à déterminer :

$$y_p(x) = (ax^2+bx+c)\, e^x$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = (2ax+b)\, e^x + (ax^2+bx+c)\, e^x$$

$$= (ax^2 + (b+2a)x + b+c)\, e^x$$

$$\Rightarrow y_p'(x) + y_p(x)$$

$$= (2ax^2 + (2b+2a)x + 2c+b)\, e^x$$

Pour que la fct y_p ~~(x)~~ $= (ax^2+bx+c)\, e^x$ soit une sol. de (E)

$$\Leftrightarrow y_p'(x) + y_p(x) = (x^2-1)\, e^x$$

$$\Leftrightarrow (2ax^2 + 2(b+a)x + \cancel{b}\, 2c+b)\, e^x = (x^2-1)\, e^x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(b+a) = 0 \\ 2c+b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})\, e^x$ est une sol. particulière de (E) #